

هو الحسب



تقديم به ساحت مقدس حضرت زهرا (س)

## کتاب کار ریاضه نهج سرنگ

- ★ درس‌نامه‌ی کامل و روان به صورت بخش به بخش
- ★ تمرین‌های متنوع، طبقه‌بندی شده و هدفمند جهت کار در مدرسه و منزل
- ★ آزمون‌های امتحانی در پایان هر فصل و چند دوره آزمون نهایی
- ★ چند دوره آزمون‌های ورودی مدارس نمونه دولتی
- ★ تست‌های فصل به فصل از آزمون‌های بهبود عملکرد و نمونه دولتی
- ★ استفاده از برنامه‌ی تخصصی  $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  برای تایپ اصولی

|                                                      |                        |
|------------------------------------------------------|------------------------|
| گروه مؤلفان                                          | سرشناسه:               |
| کتاب کار ریاضی نمونه پایه‌ی نهم دوره‌ی اول متوسطه    | عنوان:                 |
| یزد، تیک، ۱۳۹۶                                       | مشخصات نشر:            |
| ۲۸۰ ص، مصور، جدول، نمودار                            | مشخصات ظاهری:          |
| ۵-۹۵-۶۱۹۹-۶۰۰-۹۷۸                                    | شابک:                  |
| فیپای مختصر                                          | وضعیت فهرست‌نویسی:     |
| ریاضیات - راهنمای آموزشی (دوره‌ی اول متوسطه)         | موضوع:                 |
| ریاضیات - مسائل، تمرین‌ها و غیره (دوره‌ی اول متوسطه) | موضوع:                 |
| ۴۸۳۴۸۱۹                                              | شماره‌ی کتابشناسی ملی: |

|                                                 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
|-------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| نام کتاب:                                       | کتاب کار ریاضی نمونه پایه‌ی نهم دوره‌ی اول متوسطه                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
| مؤلفان، ناظران و پدیدآورندگان (به ترتیب الفبا): | محمد علی آزادنژاد، سمانه اسدی، مهدیه حاجی آخوندی<br>مهدی خانجانی، امیر محمد دهشیری، محمد جواد دهقان اشکذری<br>محسن راجی، فاطمه زرنگارپناه، مریم شهری‌زاده<br>فخرالسادات عابدینیان، سیده فاطمه عزیزالدینی، محمد رضا قربانی<br>عباس کارگر، ... کرم کیانی، رضا ملک‌زاده، محمد رضا منتظری<br>عالیه مهرآموز، سعیده‌سادات میرفخرالدین، محمد علی هادیان ندوشن |
| حروف‌نگار:                                      | محمد علی آزادنژاد، معصومه اجودانی                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
| رسام و صفحه‌آرا:                                | محمد علی آزادنژاد                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
| طراح جلد:                                       | حسین دهقان                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| ناشر:                                           | انتشارات تیک                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
| نوبت چاپ:                                       | ششم (۱۴۰۴)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| شمارگان:                                        | ۳۰۰۰ نسخه                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
| قیمت:                                           | ۲۲۳۰۰۰ تومان                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
| دفتر مرکزی:                                     | یزد، صفاییه، ب شهیدان انتظاری - تلفن ۰۳۵۳۸۲۸۱۲۷۸                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
| مرکز پخش:                                       | انتشارات تیک (۰۳۵۳۸۲۸۱۲۷۸) کتاب چشمک (۰۳۵۳۶۲۶۱۷۷۰)                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |



کلیه‌ی حقوق مادی و معنوی این اثر برای انتشارات تیک محفوظ است. هیچ شخص حقیقی و حقوقی حق چاپ و تکثیر این اثر را به هر شکل و صورت اهم از فتوکپی، چاپ کتاب و ... را ندارد.

متخلفین به موجب بند ۵ ماده‌ی قانون حمایت از ناشرین تحت پیگرد قانونی قرار می‌گیرند.

## فهرست مطالب

|    |                                        |     |
|----|----------------------------------------|-----|
| ۱  | مجموعه‌ها                              | ۱   |
| ۲  | ۱.۱ معرفی مجموعه‌ها                    | ۱.۱ |
| ۴  | ۲.۱ مجموعه‌های برابر و نمایش مجموعه‌ها | ۲.۱ |
| ۸  | ۳.۱ اجتماع، اشتراک و تفاضل مجموعه‌ها   | ۳.۱ |
| ۱۰ | ۴.۱ احتمال                             | ۴.۱ |
| ۱۵ | ۵.۱ منتخب نمونه دولتی و بهبود عملکرد   | ۵.۱ |
| ۱۷ | ۶.۱ سؤالات تکمیلی                      | ۶.۱ |
| ۱۸ | ۲ عددهای حقیقی                         | ۲   |
| ۱۹ | ۱.۲ عددهای گویا                        | ۱.۲ |
| ۲۲ | ۲.۲ عددهای حقیقی                       | ۲.۲ |
| ۲۶ | ۳.۲ قدر مطلق                           | ۳.۲ |
| ۳۲ | ۴.۲ منتخب نمونه دولتی و بهبود عملکرد   | ۴.۲ |
| ۳۴ | ۵.۲ سؤالات تکمیلی                      | ۵.۲ |
| ۳۵ | ۳ استدلال و اثبات در هندسه             | ۳   |
| ۳۶ | ۱.۳ یادآوری                            | ۱.۳ |
| ۳۸ | ۲.۳ هم نهشتی مثلث‌ها                   | ۲.۳ |
| ۴۱ | ۳.۳ اثبات و حل مسأله                   | ۳.۳ |
| ۴۸ | ۴.۳ تشابه                              | ۴.۳ |
| ۵۲ | ۵.۳ منتخب نمونه دولتی و بهبود عملکرد   | ۵.۳ |
| ۵۴ | ۶.۳ سؤالات تکمیلی                      | ۶.۳ |
| ۵۵ | ۴ توان و ریشه                          | ۴   |
| ۵۶ | ۱.۴ توان صحیح                          | ۱.۴ |
| ۵۹ | ۲.۴ نماد علمی                          | ۲.۴ |
| ۶۰ | ۳.۴ ریشه‌گیری                          | ۳.۴ |
| ۶۳ | ۴.۴ جمع رادیکال‌ها و گویا کردن مخرج    | ۴.۴ |
| ۶۷ | ۵.۴ منتخب نمونه دولتی و بهبود عملکرد   | ۵.۴ |
| ۶۹ | ۶.۴ سؤالات تکمیلی                      | ۶.۴ |
| ۷۰ | ۵ عبارتهای جبری                        | ۵   |
| ۷۱ | ۱.۵ عبارتهای جبری و مفهوم اتحاد        | ۱.۵ |
| ۷۳ | ۲.۵ اتحاد و تجزیه                      | ۲.۵ |
| ۸۴ | ۳.۵ نامساوی‌ها و نامعادله‌ها           | ۳.۵ |
| ۸۹ | ۴.۵ منتخب نمونه دولتی و بهبود عملکرد   | ۴.۵ |
| ۹۱ | ۵.۵ سؤالات تکمیلی                      | ۵.۵ |

|     |                                               |
|-----|-----------------------------------------------|
| ۹۲  | ۶ خط و معادله‌های خطی                         |
| ۹۳  | ۱.۶ معادله خط                                 |
| ۹۸  | ۲.۶ شیب خط و عرض از مبدأ                      |
| ۱۰۴ | ۳.۶ دستگاه معادلات خطی                        |
| ۱۰۸ | ۴.۶ منتخب نمونه دولتی و بهبود عملکرد          |
| ۱۱۰ | ۵.۶ سؤالات تکمیلی                             |
| ۱۱۱ | ۷ عبارت‌های گویا                              |
| ۱۱۲ | ۱.۷ معرفی و ساده کردن عبارت‌های گویا          |
| ۱۱۵ | ۲.۷ محاسبات عبارت‌های گویا                    |
| ۱۲۱ | ۳.۷ تقسیم چندجمله‌ای‌ها                       |
| ۱۲۶ | ۴.۷ منتخب نمونه دولتی و بهبود عملکرد          |
| ۱۲۸ | ۵.۷ سؤالات تکمیلی                             |
| ۱۲۹ | ۸ مساحت و حجم                                 |
| ۱۳۰ | ۱.۸ مساحت و حجم                               |
| ۱۳۷ | ۲.۸ منتخب نمونه دولتی و بهبود عملکرد          |
| ۱۳۹ | ۳.۸ سؤالات تکمیلی                             |
| ۱۴۰ | ۹ امتحان‌های نوبت اول و دوم                   |
| ۱۴۱ | آزمون نوبت اول شماره ۱                        |
| ۱۴۳ | آزمون نوبت اول شماره ۲                        |
| ۱۴۵ | آزمون نوبت اول شماره ۳                        |
| ۱۴۷ | نهایی ۱۴۰۰ یزد                                |
| ۱۴۹ | نهایی ۱۴۰۱ یزد                                |
| ۱۵۱ | نهایی ۱۴۰۲ یزد                                |
| ۱۵۳ | تابستان ۱۴۰۲ یزد                              |
| ۱۵۴ | نهایی ۱۴۰۳ صبح                                |
| ۱۵۷ | نهایی ۱۴۰۳ عصر                                |
| ۱۶۰ | تابستان ۱۴۰۳ یزد                              |
| ۱۶۳ | نهایی ۱۴۰۴ صبح                                |
| ۱۶۶ | نهایی ۱۴۰۴ عصر                                |
| ۱۶۸ | تابستان ۱۴۰۴ یزد                              |
| ۱۷۱ | ۱۰ آزمون‌ها                                   |
| ۱۷۲ | ۱.۱۰ تورنی تیم یزد ۱۴۰۲                       |
| ۱۷۳ | ۲.۱۰ تورنی تیم یزد ۱۴۰۳                       |
| ۱۷۴ | ۳.۱۰ ورودی نمونه دولتی یزد ۱۴۰۰               |
| ۱۷۷ | ۴.۱۰ ورودی نمونه دولتی یزد ۱۴۰۱               |
| ۱۷۹ | ۵.۱۰ ورودی نمونه دولتی سراسر کشور ۱۴۰۲        |
| ۱۸۱ | ۶.۱۰ ورودی استعداد درخشان ۱۴۰۰                |
| ۱۸۳ | ۷.۱۰ ورودی استعداد درخشان ۱۴۰۱                |
| ۱۸۴ | ۸.۱۰ ورودی استعداد درخشان ۱۴۰۲                |
| ۱۸۵ | ۹.۱۰ ورودی استعداد درخشان و نمونه دولتی ۱۴۰۳  |
| ۱۸۷ | ۱۰.۱۰ ورودی استعداد درخشان و نمونه دولتی ۱۴۰۴ |

وَهُوَ الَّذِي جَعَلَ لَكُمُ النُّجُومَ لِتَهْتَدُوا بِهَا فِي ظُلُمَاتِ الْبَرِّ وَالْبَحْرِ .....  
او (خداوند) کسی است که ستارگان را برای شما قرار داد، تا در تاریکی‌های خشکی و دریا، به وسیله آنها راه یابید...  
(سوره انعام، آیه ۹۷)



منظومه شمسی مجموعه‌ای است شامل ستاره خورشید و سیاره‌هایی که روی مدارهای خاصی در حال چرخش هستند؛ نظیر ستاره خورشید. ستاره‌هایی با بزرگی چند هزار برابر خورشید رصد شده است. طوری که اگر به اندازه خورشید به زمین نزدیک بودند، تمام آسمان ما را می‌پوشاندند.

## بخش ۱.۱

## معرفی مجموعه‌ها

به دسته‌ای از اشیای کاملاً مشخص (معین) و متمایز (غیر تکراری) یک **مجموعه** می‌گوییم. به هر یک از اشیاء داخل مجموعه، **عضو** مجموعه می‌گوییم.

| نمایش مجموعه با عبارت کلامی | نمایش مجموعه با آکولاد و کاما  | نمایش با نمودار ون (Venn diagram) |
|-----------------------------|--------------------------------|-----------------------------------|
| حروف یک نقطه‌ای فارسی       | {ف، ض، ط، ذ، غ، ز، ن، خ، ج، ب} |                                   |
| اعداد فرد یک رقمی           | {۱، ۳، ۵، ۷، ۹}                |                                   |

- مجموعه‌های با بی‌نهایت عضو، مانند مجموعه‌ی اعداد فرد را به صورت  $\{۱، ۳، ۵، \dots\}$  نمایش می‌دهیم.
- به مجموعه‌ای که عضو نداشته باشد مجموعه‌ی **تهی** می‌گوییم و به صورت  $\emptyset$  یا  $\{\}$  نمایش می‌دهیم.

|                                                                                                         |                                                                                                                 |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| عبارت «سه کتاب درسی» یک مجموعه را مشخص نمی‌کند. چون هر کسی به‌طور سلیقه‌ای، کتاب درسی را انتخاب می‌کند. | عبارت «اعداد اول» با این که بی‌شمار عدد را شامل می‌شود، اما چون تعریف مشخصی دارد، بیان‌گر یک مجموعه است.        |
| عبارت «چهار نقاش ایرانی» توصیف یک مجموعه نیست. چون نقاش‌ها، به طور دقیق مشخص نشده‌اند.                  | عبارت «اعداد طبیعی بین ۱ و ۲» با این که عددی را شامل نمی‌شود اما یک مجموعه را مشخص می‌کند. مجموعه‌ی $\emptyset$ |

- برای نام‌گذاری مجموعه‌ها از حروف بزرگ لاتین مانند  $A$ ،  $B$  و  $C$  استفاده می‌کنیم.
- تکرار** اعضای یک مجموعه، تعداد اعضای مجموعه را زیاد نمی‌کند. مانند  $\{۳، ۳\} = \{۳\}$
- ترتیب** در نوشتن اعضای یک مجموعه، مهم نیست. مانند  $\{۱، ۳، ۵\} = \{۳، ۱، ۵\}$
- اگر  $a$  عضوی از مجموعه‌ی  $A$  باشد، می‌نویسیم  $a \in A$ .
- و اگر  $b$  عضوی از مجموعه‌ی  $A$  نباشد، می‌نویسیم  $b \notin A$ .
- تعداد عضوهای یک مجموعه مانند  $A$  را با  $n(A)$  نمایش می‌دهیم. مثلاً برای  $A = \{۱، a\}$  داریم  $۱ \in A$  و  $c \notin A$  و  $n(A) = ۳$

## مثال

در هر مورد، اعضای مجموعه و تعداد آن‌ها را مشخص کنید.

(آ) مجموعه مقسوم‌علیه‌های عدد ۳۶ (ب) مجموعه حروف کلمه‌ی «ریاضیات»

(آ)  $A = \{۱، ۲، ۳، ۴، ۶، ۹، ۱۲، ۱۸، ۳۶\}$  جموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های عدد ۳۶ است، بنابراین  $n(A) = ۹$

(ب)  $C = \{ر، ی، ا، ض، ت\}$  مجموعه‌ی حروف کلمه‌ی «ریاضیات» است، بنابراین  $n(C) = ۵$  دقت کنید که تکرار و ترتیب در مجموعه مهم نیست.

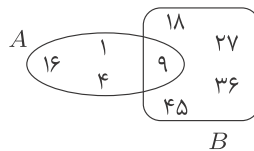
۱- درستی یا نادرستی عبارات زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید.

- آ) عبارت «سه عدد کوچکتر از ۱۰»، یک مجموعه را توصیف می‌کند.  
 ب) عبارت «چهار میوه‌ی خوشمزه» مشخص‌کننده‌ی یک مجموعه است.  
 پ) عبارت «عددهای اول بین ۱۴ و ۱۶» مجموعه‌ی تهی را مشخص می‌کند.  
 ت) مجموعه حروف کلمه «عالی» با مجموعه حروف کلمه «علیا» برابر است.  
 ث) مجموعه‌ی  $A = \{\emptyset\}$  یک عضو دارد. ج)  $\emptyset = \{\emptyset\}$   
 چ)  $\{2, 5, 5, 5, 7, 7\} = \{2, 5, 7\}$  ح)  $\emptyset \in \{\emptyset\}$

۲- جای خالی را کامل کنید.

- آ) اگر مجموعه‌ای عضو نداشته باشد آن را مجموعه‌ی ..... می‌گویند.  
 ب) اگر  $x \in A$  باشد، در این صورت می‌گوییم  $x$  .....  $A$  است.  
 پ) به نمایش یک مجموعه با منحنی بسته، نمایش با استفاده از نمودار ..... گفته می‌شود.  
 ت) مجموعه‌ی  $\{\emptyset, \{3, 4\}, \{3\}\}$  ..... عضو دارد.  
 ث) مجموعه‌ی  $\{\frac{1}{5}, \frac{0}{2}, -\sqrt{4}, -2\}$  ..... عضو دارد.

۳- برای مجموعه‌های  $A = \{a, b, 3\}$  و  $B = \{4, 5, b\}$  نمودار ون رسم کنید.



۴- با توجه به نمودار ون مقابل،

- آ) مجموعه‌های  $A$  و  $B$  را با اعضا مشخص کنید.  
 ب) متناظر با هر مجموعه یک عبارت کلامی بنویسید.  
 پ) درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.

$$9 \in A \qquad 9 \notin B \qquad \frac{3}{3} \in A \qquad 42 \notin B$$

۵- مجموعه‌های زیر را با عضوهایشان نمایش داده، تعداد اعضای هر مجموعه را مشخص کنید.

آ) مجموعه‌ی عددهای مرکب کوچکتر از ۱۵

ب) حروف چهار نقطه‌ای فارسی

پ) مجموعه اعداد طبیعی دو رقمی که بر ۶ بخش پذیرند

ت) مجموعه‌ی عددهای مربع کامل دورقمی کوچکتر از ۵۰

ث)  $\{c, d, \{d, c\}, \{c, d\}, \emptyset, \{\}\}$

## بخش ۲.۱

## مجموعه‌های برابر و نمایش مجموعه‌ها

**مجموعه‌های برابر:** دو مجموعه‌ی  $A$  و  $B$  را **برابر** گوئیم، هرگاه هر عضو  $A$  عضوی از  $B$  بوده و برعکس هر عضو  $B$  عضوی از  $A$  باشد، در این صورت می‌نویسیم:  $A = B$

## مثال

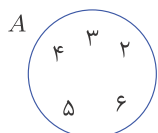
اگر  $\left\{ \frac{-\sqrt{9}}{\sqrt{36}}, \frac{0}{2}, x, (\frac{0}{3})^2 \right\} = \left\{ \frac{1}{5}, y, -\frac{1}{2}, \sqrt{\frac{0}{49}} \right\}$  در این صورت  $x$  و  $y$  را به دست آورید.

کافی است نمایش ساده شده‌ی تمام اعضای هر دو مجموعه را در نظر بگیریم.

$$\left\{ \left( \frac{-\sqrt{9}}{\sqrt{36}} \right), \frac{0}{2}, x, \left( \frac{0}{3} \right)^2 \right\} = \left\{ \frac{1}{5}, y, -\frac{1}{2}, \sqrt{\frac{0}{49}} \right\}$$

## نمایش مجموعه‌ها

یک مجموعه را معمولاً به یکی از سه روش زیر نمایش می‌دهند:



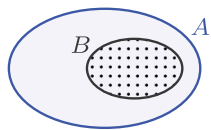
• نمایش به کمک نمودار ون: مثل نمودار مقابل

• نمایش با اعضا: مثلاً  $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$

• نمایش با بیان ریاضی: مثلاً  $A = \{x | x \in \mathbb{N}, 1 < x < 7\}$

| نمایش با زبان ریاضی                        | نمایش اعضا               |
|--------------------------------------------|--------------------------|
| $\{2k - 3   k = 1, 2, 3, 4\}$              | $\{-1, 1, 3, 5\}$        |
| $\{m^2 + 1   m = \pm 2, \pm 1, 0\}$        | $\{5, 2, 1\}$            |
| $\{x^2   x \in \mathbb{Z}, 1 \leq x < 5\}$ | $\{1^2, 2^2, 3^2, 4^2\}$ |
| $\{x   x \in \mathbb{Z}, 1 \leq x^2 < 5\}$ | $\{1, 2, -1, -2\}$       |

**زیرمجموعه:** مجموعه‌ی  $A$  را زیرمجموعه‌ی  $B$  گوئیم هرگاه هر عضو  $A$ ، عضو  $B$  باشد و می‌نویسیم  $A \subseteq B$ . ولی اگر عضوی از  $A$ ، عضو  $B$  نباشد، می‌نویسیم  $A \not\subseteq B$ .



• هر مجموعه زیرمجموعه‌ی خودش است.  $A \subseteq A$ .

• مجموعه‌ی تهی زیرمجموعه‌ی هر مجموعه است.  $\emptyset \subseteq A$ .

• اگر  $A \subseteq B$  و  $B \subseteq A$ ، آنگاه  $A = B$ .

• اگر  $A \subseteq B$  و  $B \subseteq C$ ، آنگاه  $A \subseteq C$ .

## مثال

برای مجموعه‌های  $A = \{2\}$  و  $B = \{3, 5, \{2\}\}$  و  $C = \{\{\{2\}, 3, 5\}, 2\}$  کدام نادرست است؟

$A \subseteq C$  (۴)

$B \in C$  (۳)

$A \in C$  (۲)

$A \in B$  (۱)

به غیر از گزینه‌ی دوم همگی درستند. خوب نگاه کنید  $2 \in C$  اما  $\{2\} \notin C$ .

**تعداد زیرمجموعه‌ها:** اگر مجموعه‌ای  $n$  عضو داشته باشد،  $2^n$  زیرمجموعه خواهد داشت.

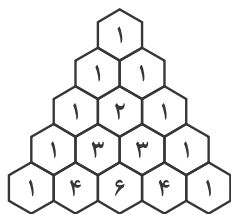
## مثال

تمام زیرمجموعه‌های  $\{\otimes, *\}$  را بنویسید.

$$\text{زیرمجموعه‌های } A \begin{cases} \text{زیرمجموعه، شامل } \otimes \text{ باشد} \\ \text{زیرمجموعه، شامل } \otimes \text{ نباشد} \end{cases} \begin{cases} \Rightarrow \{\otimes, *\} \\ \Rightarrow \{\otimes\} \\ \Rightarrow \{*\} \\ \Rightarrow \{\} \end{cases}$$

هنگام ساخت یک زیرمجموعه‌ی دلخواه، برای هر عضو مجموعه‌ی اصلی، دو حالت وجود دارد: یا آن عضو در زیرمجموعه هست یا نیست. پس

$$4 = 2^2 = 2 \times 2 = \text{تعداد زیرمجموعه‌های } A$$



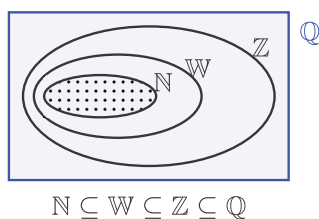
| زیرمجموعه‌های $A = \{a\}$ |         |
|---------------------------|---------|
| صفر عضوی                  | یک عضوی |
| $\{\}$                    | $\{a\}$ |

| زیرمجموعه‌های $B = \{\otimes, *\}$ |                      |                  |
|------------------------------------|----------------------|------------------|
| صفر عضوی                           | یک عضوی              | دو عضوی          |
| $\{\}$                             | $\{\otimes\}, \{*\}$ | $\{\otimes, *\}$ |

| زیرمجموعه‌های $C = \{x, y, z\}$ |                       |                                |               |
|---------------------------------|-----------------------|--------------------------------|---------------|
| صفر عضوی                        | یک عضوی               | دو عضوی                        | سه عضوی       |
| $\{\}$                          | $\{x\}, \{y\}, \{z\}$ | $\{y, z\}, \{x, z\}, \{x, y\}$ | $\{x, y, z\}$ |

| زیرمجموعه‌های $\{1, 2, 3, 4\}$ |                              |                                                              |                                                      |                  |
|--------------------------------|------------------------------|--------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------|------------------|
| صفر عضوی                       | یک عضوی                      | دو عضوی                                                      | سه عضوی                                              | چهار عضوی        |
| $\{\}$                         | $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}$ | $\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{1, 3\}, \{2, 4\}, \{1, 4\}$ | $\{2, 3, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 3\}$ | $\{1, 2, 3, 4\}$ |

## مجموعه‌های اعداد:



- مجموعه‌ی  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$  را مجموعه‌ی اعداد **طبیعی** گویند.

$$E \xrightarrow{\text{زوج‌ها}} \{2, 4, 6, 8, \dots\} = \{2k | k \in \mathbb{N}\}$$

$$O \xrightarrow{\text{فردها}} \{1, 3, 5, 7, \dots\} = \{2k - 1 | k \in \mathbb{N}\}$$

- مجموعه‌ی  $\mathbb{W} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$  را مجموعه‌ی اعداد **حسابی** گویند. دقت کنید که  $\mathbb{W}$  به غیر از اعداد طبیعی، صفر را هم دارد.

- مجموعه‌ی  $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$  را مجموعه‌ی اعداد **صحیح** گویند. در واقع اعداد صحیح شامل اعداد طبیعی، صفر و قرینه‌ی اعداد طبیعی است.

- عددی که بتوان به صورت کسری (با صورت صحیح، و مخرج صحیح و ناصفر) نوشت را **گویا** گویند. مثلاً  $-\frac{5}{1}$  گویا است. چون می‌توان آن را به صورت کسر  $-\frac{5}{1}$  نوشت. در واقع هر عدد صحیح، گویا است.

فعلاً همین‌قدر بدانید که  $\sqrt{2}$  و  $\pi$  گویا نیستند. اما  $\frac{314}{100} = 3.14$  گویا است!!

مجموعه‌ی اعداد گویا به زبان ریاضی عبارت است از:  $\left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$

۱- درستی یا نادرستی عبارات زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید.

- (آ) هر عدد گویا یک عدد طبیعی است. (ب) عدد گویایی وجود دارد که صحیح نباشد.  
 (پ) هر عدد حسابی یک عدد صحیح است. (ت) هر مجموعه، زیرمجموعه‌ی مجموعه‌ی تهی است.  
 (ث) هر مجموعه، زیرمجموعه خودش است. (ج) اگر  $A \not\subseteq B$  و  $B \not\subseteq C$  آن‌گاه  $A \not\subseteq C$   
 (چ)  $\{5\} \in \{5, \{0\}\}$  (ح)  $5 \in \{5, \{0\}\}$  (خ)  $2 \in \{1, \{2, 3\}\}$   
 (ذ)  $\{5\} \subseteq \{5, \{0\}\}$  (ذ)  $5 \subseteq \{5, \{0\}\}$  (ر)  $2 \subseteq \{1, \{2, 3\}\}$   
 (ز)  $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$  (ژ)  $\{0, 1\} \subseteq \mathbb{N}$  (س)  $\mathbb{W} \subseteq \mathbb{N}$

۲- جاهای خالی را با عدد یا کلمه مناسب کامل نمایید.

- (آ) یک مجموعه سه عضوی، ..... زیرمجموعه دارد.  
 (ب) یک مجموعه ..... عضوی، ۱۶ زیرمجموعه دارد.  
 (پ) مجموعه ..... زیرمجموعه‌ی همه‌ی مجموعه‌هاست.

۳- در هر مورد  $x$  و  $y$  و  $z$  را طوری پیدا کنید که مجموعه‌ها با هم برابر باشند.

- (آ)  $\{1, x - 5, 2\} = \{2, 3y - 11, 3\}$  (ب)  $\{x + 5, 2, 6\} = \{6, 9, y - 7\}$   
 (پ)  $\{-6, x, y, \frac{3}{5}\} = \{\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, z, \sqrt{\frac{9}{25}}\}$  (ت)  $\{x^2, 2x - 1\} = \{y - 1\}$   
 (ث)  $\{\frac{\sqrt{100}}{6}, 1, x, \sqrt{\sqrt{81}}, \frac{0}{71}\} = \{y, \frac{-5}{-5}, 0, -0.25, \frac{12}{4}\}$

۴- مجموعه‌های زیر را با اعضایشان مشخص کنید.

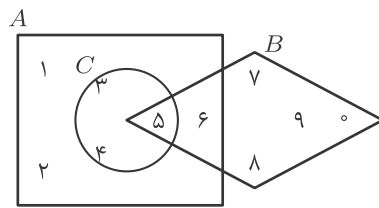
- (آ)  $\{x \in \mathbb{Z} \mid -4 < x \leq 2\}$  (ب)  $\{x^2 \mid x \in \mathbb{N}, x < 4\}$   
 (پ)  $\{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 \leq 11\}$  (ت)  $\{2x + 1 \mid x \in \mathbb{W}, x < 3\}$   
 (ث)  $\{a^2 + 5 \mid a \in \mathbb{W}, -2 \leq a \leq 2\}$

۵- مجموعه‌های زیر را با نماد ریاضی بنویسید.

آ) مجموعه اعداد صحیح بین  $-۳$  و  $۷$       ب) مجموعه اعداد طبیعی بین  $-۳$  و  $۷$

پ) مجموعه اعداد صحیح بخش پذیر بر  $۳$       ت)  $\{۶, ۱۱, ۱۶, ۲۱, ۲۶\}$

ث)  $\{۱, ۴, ۹, ۱۶, ۲۵, \dots\}$       ج)  $\{۱, ۳, ۹, ۲۷, \dots\}$



۶- در داخل مربع، نماد مناسب ( $\subseteq, \not\subseteq, \in, \notin$ ) قرار دهید.

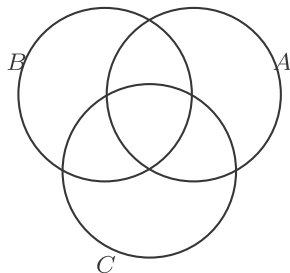
$$\begin{array}{lll} ۹ \square A & A \square B & \{۷, ۸\} \square B \\ \emptyset \square C & \circ \square B & ۱ \square C \end{array}$$

۷- آ) اگر  $M = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$  باشد، آنگاه تعداد زیرمجموعه‌های  $M$  چقدر است؟

ب) تمام زیرمجموعه‌های یک عضوی  $M$  را بنویسید.

پ) تمام زیرمجموعه‌های دو عضوی  $M$  را بنویسید.

ت) تمام زیرمجموعه‌های سه عضوی  $M$  را بنویسید.



۸- اعضای  $A$  و  $B$  و  $C$  را در جای مناسب نمودار قرار دهید.

$$A = \{۶, ۷, ۸\}$$

$$B = \{۷, ۸, ۹, ۱۱\}$$

$$C = \{۷, ۹, ۶, ۱۵\}$$

۹- درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را بنویسید.

$$A = \{-۵, -۴, -۳, \dots, ۵\}, \quad B = \{۱۰, ۱۱, \circ, -\frac{۳}{۳}\}, \quad C = \{\circ, -۳, ۴, -۱\}$$

آ)  $C \subseteq A$

ب)  $C \subseteq B$

پ)  $B \not\subseteq A$

ت)  $\{-۳, -۴\} \in A$

ث)  $۲ \notin A$

ج)  $۱۰ \in A$

چ)  $\emptyset \in B$

ح)  $\{\circ, -۱\} \subseteq B$

خ)  $۱ \subset A$

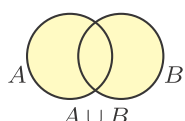
## بخش ۳.۱

## اجتماع، اشتراک و تفاضل مجموعه‌ها



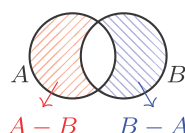
**اشتراک:** اشتراک دو مجموعه‌ی  $A$  و  $B$ ، تنها شامل اعضای مشترک هر دو مجموعه است که به صورت  $A \cap B$  نمایش می‌دهند.

- به دو مجموعه که اشتراک آن‌ها تهی باشد، «دو مجموعه‌ی جدا از هم» می‌گویند.
- اگر  $x \in (A \cap B)$ ، آن‌گاه هم  $x \in A$  و هم  $x \in B$ .



**اجتماع:** اجتماع دو مجموعه‌ی  $A$  و  $B$ ، شامل اعضایی است که حداقل در یکی از مجموعه‌های  $A$  یا  $B$  باشند. و با نماد  $A \cup B$  نشان می‌دهیم.

- اجتماع دو مجموعه، شامل جمیع اعضای آن‌ها است. (نماد اجتماع از Union می‌آید!)
- اگر  $x \in (A \cup B)$ ، آن‌گاه  $x \in A$  یا  $x \in B$ .



**تفاضل:** مجموعه‌ی  $A - B$ ، مجموعه‌ای است که عضوهای آن در  $A$  باشند و در  $B$  نباشند.

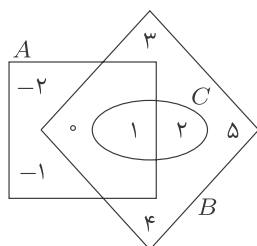
- دو مجموعه‌ی  $A - B$  و  $B - A$  دو مجموعه‌ی جدا از هم هستند.
- اگر  $x \in (A - B)$ ، آن‌گاه  $x \in A$  و  $x \notin B$ .

نکات زیر را حفظ نکنید! (با کمک نمودار ون یاد بگیرید.)

|                                                                                                                                                                                         |                                                             |                                                          |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|
| $A - B \neq B - A$                                                                                                                                                                      | $A \cup B = B \cup A$                                       | $A \cap B = B \cap A$                                    |
| $A - \emptyset = A, \quad \emptyset - A = \emptyset$                                                                                                                                    | $\emptyset \cup A = A$                                      | $A \cap \emptyset = \emptyset$                           |
| $A - A = \emptyset$                                                                                                                                                                     | $A \cup A = A$                                              | $A \cap A = A$                                           |
| $(A - B) \subseteq A$<br>$(B - A) \subseteq B$                                                                                                                                          | $A \subseteq (A \cup B)$<br>$B \subseteq (A \cup B)$        | $(A \cap B) \subseteq A$<br>$(A \cap B) \subseteq B$     |
| $A \cup (A \cap B) = A$<br>$A \cap (A \cup B) = A$<br>$(B - A) - B = \emptyset$<br>$(A - B) \cap (B - A) = \emptyset$<br>$(A - B) \cup (A \cap B) = A$<br>$(B - A) \cup (A \cap B) = B$ | <br>$A \cap B = B$<br>$A \cup B = A$<br>$B - A = \emptyset$ | <br>$A \cap B = \emptyset$<br>$A - B = A$<br>$B - A = B$ |
| <br>$(A - B) - C \neq A - (B - C)$                                                                                                                                                      | <br>$(A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A) = A \cup B$       |                                                          |

۱- اگر  $A = \{0, 1, 2, 3\}$ ،  $B = \{0, 4, 5, 6\}$  و  $C = \{0, 1, 4\}$  اعضای هر مورد را مشخص کنید.

- |                       |                        |
|-----------------------|------------------------|
| الف) $A \cup B$       | ب) $A \cap C$          |
| پ) $B - C$            | ت) $B \cup C$          |
| ث) $C \cap B$         | ج) $C - A$             |
| چ) $B \cup \emptyset$ | ح) $A - (B - C)$       |
| خ) $B \cap (C - A)$   | د) $B \cup (A \cap C)$ |



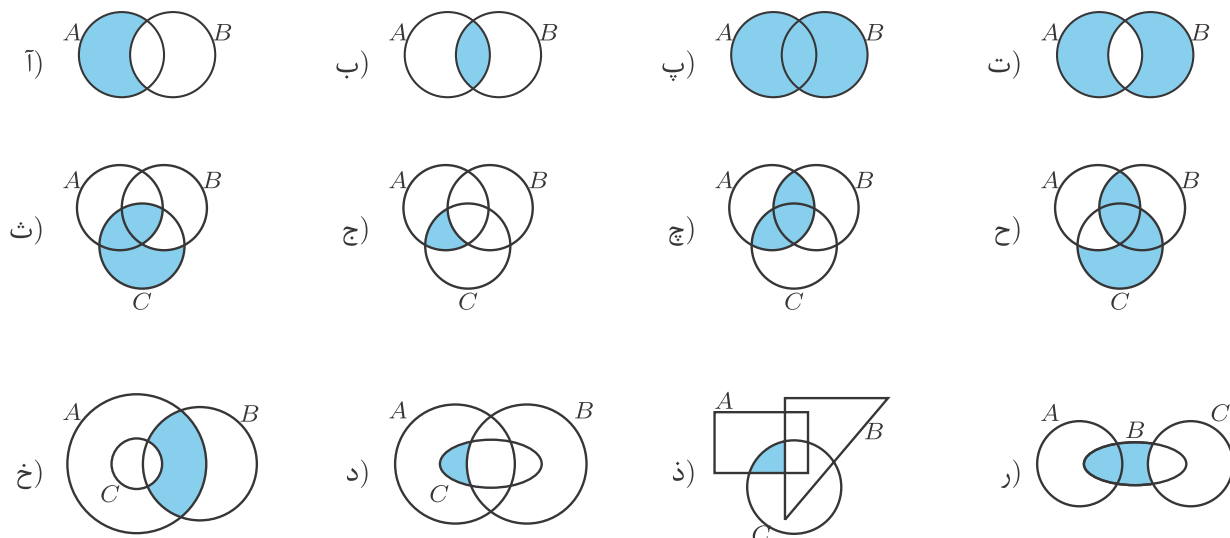
۲- با توجه به نمودار مقابل، درستی یا نادرستی عبارت‌ها را مشخص کنید.

- |                                |                                   |
|--------------------------------|-----------------------------------|
| الف) $B \cap \emptyset = B$    | ب) $A \cap B = \{1, 2\}$          |
| پ) $(A \cap B) \cap C = \{1\}$ | ت) $n(B - C) = n(A - C)$          |
| ث) $(A \cup C) - B = A$        | ج) $(B - C) \cap (A - C) = \{0\}$ |

۳- در هر مورد حاصل را بنویسید.

- |                                               |                                               |                                   |
|-----------------------------------------------|-----------------------------------------------|-----------------------------------|
| الف) $A \cup (A \cap B) =$                    | ب) $(B - A) \cup (A \cap B) =$                |                                   |
| پ) $C \subseteq D \Rightarrow C \cap D =$     | ت) $C \subseteq D \Rightarrow C - D =$        |                                   |
| ث) $E \cap F = \emptyset \Rightarrow F - E =$ | ج) $E \cap F = \emptyset \Rightarrow E - F =$ |                                   |
| چ) $\mathbb{N} - \mathbb{W} =$                | خ) $\mathbb{Z} - \mathbb{W} =$                | د) $\mathbb{Q} \cup \mathbb{Z} =$ |
| ذ) $\mathbb{N} \cap \mathbb{Z} =$             | ز) $\mathbb{W} - (\mathbb{W} - \mathbb{N}) =$ | ژ) $\mathbb{N} \cap \mathbb{Z} =$ |

۴- برای هر شکل نماد مربوط به قسمت رنگی را بنویسید.



## بخش ۴.۱

## احتمال

آزمایشی که نتیجه‌ی آن از قبل مشخص نباشد، را «آزمایش تصادفی» گویند. مثلاً در پرتاب تاس نمی‌توان از قبل مشخص کرد چه عددی ظاهر می‌شود.

مجموعه‌ی همه‌ی حالت‌های ممکن یک آزمایش تصادفی را **فضای نمونه‌ی** آن آزمایش گوییم. فضای نمونه را با  $S$  و تعداد کل حالات ممکن را با  $n(S)$  نشان می‌دهیم. برای پیدا کردن  $S$ ، می‌توانیم از «جدول نظام‌دار» یا «نمودار درختی» استفاده کنیم.

| پرتاب دو تاس                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | پرتاب سه سکه | پرتاب سکه و تاس |     |     |     |  |  |     |     |     |     |     |     |  |     |     |     |     |     |     |  |     |     |     |     |     |     |  |     |     |     |     |     |     |  |     |     |     |     |     |     |  |     |     |     |     |     |     |  |                                                                                                                                                                                                     |                                                                                                                                                                                                             |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------|-----------------|-----|-----|-----|--|--|-----|-----|-----|-----|-----|-----|--|-----|-----|-----|-----|-----|-----|--|-----|-----|-----|-----|-----|-----|--|-----|-----|-----|-----|-----|-----|--|-----|-----|-----|-----|-----|-----|--|-----|-----|-----|-----|-----|-----|--|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <table><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>۱,۶</td><td>۱,۵</td><td>۱,۴</td><td>۱,۳</td><td>۱,۲</td><td>۱,۱</td><td></td></tr><tr><td>۲,۶</td><td>۲,۵</td><td>۲,۴</td><td>۲,۳</td><td>۲,۲</td><td>۲,۱</td><td></td></tr><tr><td>۳,۶</td><td>۳,۵</td><td>۳,۴</td><td>۳,۳</td><td>۳,۲</td><td>۳,۱</td><td></td></tr><tr><td>۴,۶</td><td>۴,۵</td><td>۴,۴</td><td>۴,۳</td><td>۴,۲</td><td>۴,۱</td><td></td></tr><tr><td>۵,۶</td><td>۵,۵</td><td>۵,۴</td><td>۵,۳</td><td>۵,۲</td><td>۵,۱</td><td></td></tr><tr><td>۶,۶</td><td>۶,۵</td><td>۶,۴</td><td>۶,۳</td><td>۶,۲</td><td>۶,۱</td><td></td></tr></table> |              |                 |     |     |     |  |  | ۱,۶ | ۱,۵ | ۱,۴ | ۱,۳ | ۱,۲ | ۱,۱ |  | ۲,۶ | ۲,۵ | ۲,۴ | ۲,۳ | ۲,۲ | ۲,۱ |  | ۳,۶ | ۳,۵ | ۳,۴ | ۳,۳ | ۳,۲ | ۳,۱ |  | ۴,۶ | ۴,۵ | ۴,۴ | ۴,۳ | ۴,۲ | ۴,۱ |  | ۵,۶ | ۵,۵ | ۵,۴ | ۵,۳ | ۵,۲ | ۵,۱ |  | ۶,۶ | ۶,۵ | ۶,۴ | ۶,۳ | ۶,۲ | ۶,۱ |  | <div>سکه ۱</div> <div>سکه ۲</div> <div>سکه ۳</div> <div>رو</div> <div>پشت</div> <div>رو</div> <div>پشت</div> <div>رو</div> <div>پشت</div> <div>رو</div> <div>پشت</div> <div>رو</div> <div>پشت</div> | <div>تاس</div> <div>سکه</div> <div>رو</div> <div>پشت</div> <div>رو</div> <div>پشت</div> <div>رو</div> <div>پشت</div> <div>رو</div> <div>پشت</div> <div>رو</div> <div>پشت</div> <div>رو</div> <div>پشت</div> |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |              |                 |     |     |     |  |  |     |     |     |     |     |     |  |     |     |     |     |     |     |  |     |     |     |     |     |     |  |     |     |     |     |     |     |  |     |     |     |     |     |     |  |     |     |     |     |     |     |  |                                                                                                                                                                                                     |                                                                                                                                                                                                             |
| ۱,۶                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | ۱,۵          | ۱,۴             | ۱,۳ | ۱,۲ | ۱,۱ |  |  |     |     |     |     |     |     |  |     |     |     |     |     |     |  |     |     |     |     |     |     |  |     |     |     |     |     |     |  |     |     |     |     |     |     |  |     |     |     |     |     |     |  |                                                                                                                                                                                                     |                                                                                                                                                                                                             |
| ۲,۶                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | ۲,۵          | ۲,۴             | ۲,۳ | ۲,۲ | ۲,۱ |  |  |     |     |     |     |     |     |  |     |     |     |     |     |     |  |     |     |     |     |     |     |  |     |     |     |     |     |     |  |     |     |     |     |     |     |  |     |     |     |     |     |     |  |                                                                                                                                                                                                     |                                                                                                                                                                                                             |
| ۳,۶                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | ۳,۵          | ۳,۴             | ۳,۳ | ۳,۲ | ۳,۱ |  |  |     |     |     |     |     |     |  |     |     |     |     |     |     |  |     |     |     |     |     |     |  |     |     |     |     |     |     |  |     |     |     |     |     |     |  |     |     |     |     |     |     |  |                                                                                                                                                                                                     |                                                                                                                                                                                                             |
| ۴,۶                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | ۴,۵          | ۴,۴             | ۴,۳ | ۴,۲ | ۴,۱ |  |  |     |     |     |     |     |     |  |     |     |     |     |     |     |  |     |     |     |     |     |     |  |     |     |     |     |     |     |  |     |     |     |     |     |     |  |     |     |     |     |     |     |  |                                                                                                                                                                                                     |                                                                                                                                                                                                             |
| ۵,۶                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | ۵,۵          | ۵,۴             | ۵,۳ | ۵,۲ | ۵,۱ |  |  |     |     |     |     |     |     |  |     |     |     |     |     |     |  |     |     |     |     |     |     |  |     |     |     |     |     |     |  |     |     |     |     |     |     |  |     |     |     |     |     |     |  |                                                                                                                                                                                                     |                                                                                                                                                                                                             |
| ۶,۶                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | ۶,۵          | ۶,۴             | ۶,۳ | ۶,۲ | ۶,۱ |  |  |     |     |     |     |     |     |  |     |     |     |     |     |     |  |     |     |     |     |     |     |  |     |     |     |     |     |     |  |     |     |     |     |     |     |  |     |     |     |     |     |     |  |                                                                                                                                                                                                     |                                                                                                                                                                                                             |

**پیشامد:** آن‌چه قرار است پیش بیاید را «پیشامد» می‌نامند. در واقع یک پیشامد تصادفی، زیرمجموعه‌ای از  $S$  است! پیشامدها را با  $A, B$  و ... نشان می‌دهند و  $n(A)$  تعداد اعضای پیشامد  $A$  است.

**احتمال** در اکثر مواقع می‌توانیم روی دادن یک پیشامد را به صورت احتمالی، پیش‌بینی کرد.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} \implies \text{احتمال رخ دادن پیشامد } A = \frac{\text{تعداد حالت‌های متشابه مد نظر}}{\text{تعداد کل حالت‌های متشابه}}$$

## مثال

در یک کیسه، ۵ مهره‌ی سبز و ۴ مهره‌ی آبی وجود دارد. یک مهره را به‌طور تصادفی خارج می‌کنیم.

(آ) چند حالت هم‌شانس داریم؟

کلاً  $۹ = ۵ + ۴$  مهره در کیسه داریم، که شانسی همگی یکسان است. کلاً ۹ حالت متشابه و هم‌شانسی.  $n(S) = ۹$

(ب) احتمال خارج شدن مهره‌ی سبز چقدر است؟

پیشامد مطلوب ( $A$ )، خارج شدن مهره‌ی سبز است. ۵ حالت هم‌شانسی از ۹ حالت، مطلوب است.  $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۵}{۹}$

(پ) احتمال خارج نشدن مهره‌ی سبز چقدر است؟

پیشامد مطلوب ( $A'$ ): خارج نشدن مهره‌ی سبز. ۴ حالت هم‌شانسی از ۹ حالت، مطلوب است.  $P(A') = \frac{n(A')}{n(S)} = \frac{۴}{۹}$

(ت) مجموع احتمال خارج شدن و خارج نشدن مهره‌ی سبز چند است؟  $\frac{۵}{۹} + \frac{۴}{۹} = ۱$

احتمال اتفاقی که حتماً همیشه، برابر ۱ هست. (مثلاً حتماً بعد از جمعه، شنبه می‌آید)  
 احتمال اتفاقی که اصلاً نمیشه، برابر ۰ است. (مثلاً لوبیا بکاریم عدس درو کنیم!!)  
 احتمال پیشامدی که شاید اتفاق بیفتد، عددی بین ۰ و ۱ است. (مثلاً سکه را بیندازیم رو بیاید).

اندازه‌ی احتمال، همیشه عددی در محدوده‌ی ۰ تا ۱ یک است.  $(0 \leq n(A) \leq 1)$   
 مجموع احتمال روی دادن و احتمال روی ندادن یک اتفاق، همیشه یک می‌شود. احتمال رخ دادن = ۱ - احتمال رخ ندادن

## مثال

خانواده‌ای چهار فرزند دارد. چقدر احتمال دارد حداقل یکی از آن‌ها دختر باشد؟

در جدول زیر تمام حالات ممکن برای جنسیت ۴ فرزند را بررسی کرده‌ایم:

|                        |                                        |        |
|------------------------|----------------------------------------|--------|
| هیچ فرزندی، دختر نباشد | (پپپپ)                                 | حالت ۱ |
| فقط ۱ فرزند، دختر باشد | (دپپپ)، (پدپپ)، (پپدپ)، (پپپد)         | حالت ۴ |
| فقط ۲ فرزند، دختر باشد | (ددپپ)، (دپدپ)، (پدپد)، (پدپد)، (پپدد) | حالت ۶ |
| فقط ۳ فرزند، دختر باشد | (پددد)، (دپدد)، (ددپد)، (ددپد)         | حالت ۴ |
| هر ۴ فرزند، دختر باشد  | (دددد)                                 | حالت ۱ |

در این جا، به تصادف  $16 = 2^4$  حالت، می‌تواند اتفاق بیفتد که در همه‌ی حالت‌ها حداقل یک دختر ظاهر می‌شود مگر حالتی که همه‌ی فرزندان پسر باشند و بنابراین احتمال «حداقل یک دختر»، می‌شود:

$$\text{احتمال رخ دادن پیشامد مطلوب} = \frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{\text{تعداد همه‌ی حالت‌های ممکن}} = \frac{16 - 1}{16} = \frac{15}{16}$$

۱- درستی یا نادرستی جملات را معلوم کنید. علت نادرستی را نیز بیان کنید.

- (آ) اگر  $S$  مجموعه‌ی همه‌ی حالات ممکن باشد، همواره  $P(S) = 1$  است.  
 (ب) اگر  $S$  مجموعه‌ی همه‌ی حالات ممکن باشد، هر زیرمجموعه‌ی  $S$  را «پیشامد» می‌نامیم.  
 (پ) احتمال رخ دادن یک پیشامد همیشه عددی کوچک‌تر از ۱ است.  
 (ت) در پرتاب یک تاس، احتمال آمدن عدد زوج، با احتمال آمدن عدد اول برابر است.  
 (ث) سکه‌ی سالمی را ۱۰ بار پرتاب کرده‌ایم و هر ۱۰ بار پشت آمد. بنابراین حتماً بار یازدهم هم پشت می‌آید.

۲- جملات را کامل کنید

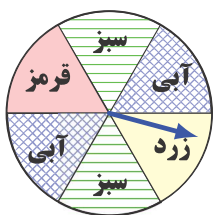
- (آ) احتمال این که در پرتاب یک تاس عدد ..... ظاهر شود برابر صفر است.  
 (ب) دو تاس را هم‌زمان پرتاب می‌کنیم، ..... حالت هم‌شانس ممکن وجود دارد.  
 (پ) اگر یک تاس و یک سکه را پرتاب کنیم، ..... حالت هم‌شانس امکان دارد اتفاق بیفتد.  
 (ت) اگر سه سکه‌ی متفاوت را هم‌زمان پرتاب کنیم، ..... حالت هم‌شانس امکان دارد اتفاق بیفتد.  
 (ث) برای انتخاب دو نفر از بین سه دانش‌آموز، ..... حالت هم‌شانس متفاوت وجود دارد.  
 (ج) هنگام چیدن سه دانش‌آموز در یک صف، ..... حالت هم‌شانس متفاوت وجود دارد.  
 (چ) اگر احتمال رخ دادن یک اتفاق،  $\frac{3}{8}$  باشد، احتمال رخ ندادن آن، ..... است.  
 (ح) احتمال وقوع یک پیشامد تصادفی، عددی از ..... تا ..... است.  
 (خ) احتمال وقوع یک اتفاق، برابر است با نسبت تعداد ..... به تعداد .....

۳- تاسی را به هوا پرتاب می‌کنیم. احتمال هر یک از موارد زیر را تعیین کنید.

- (آ) عدد رو شده، ۷ باشد. (ب) عدد رو شده، ۵ نباشد. (پ) عدد رو شده ۲ یا ۳ باشد.  
(ت) عدد رو شده مرکب باشد. (ث) عدد رو شده اول باشد. (ج) عدد رو شده اول نباشد.

۴- کارتهایی با شماره‌های ۱ تا ۱۵ در داخل جعبه‌ای قرار داده، به تصادف کارتی بیرون می‌آوریم.

- (آ) احتمال خارج شدن مجذور کامل را بیابید. (ب) احتمال خارج شدن مضرب ۳ را بیابید.  
(پ) آیا این دو پیشامد هم‌شانس هستند؟ چرا؟ (ت) پیشامدی بسازید که احتمال رخ دادن آن،  $\frac{2}{3}$  باشد.



۵- عقربه‌ی چرخنده‌ی مقابل را می‌چرخانیم.

- (آ) احتمال این که عقربه روی رنگ آبی بایستد، چقدر است؟  
(ب) احتمال این که عقربه روی رنگ قرمز بایستد، چقدر است؟  
(پ) احتمال این که عقربه روی رنگ آبی یا قرمز بایستد، چقدر است؟



۶- از کارت‌های مقابل، به تصادف کارتی برمی‌داریم.

- (آ) پیشامد برداشتن حرفی که حداقل دو نقطه داشته باشد، را بنویسید.  
(ب) احتمال برداشتن حرفی که حداقل دو نقطه داشته باشد، را بیابید.

۷- یک سکه را سه بار پرتاب می‌کنیم، تمام حالات را نوشته، موارد زیر را بیابید.

- (آ) احتمال این که هر سه بار سکه رو بیاید. (ب) احتمال این که فقط دو بار سکه رو بیاید.  
(پ) احتمال این که فقط یک بار سکه رو بیاید. (ت) احتمال این که هیچ بار سکه رو نیاید.  
(ث) احتمال این که حداقل یک بار سکه رو بیاید. (ج) احتمال این که حداکثر یک بار سکه رو بیاید.

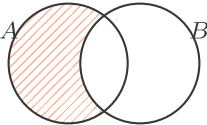
۸- دو تاس سیاه و سفید را پرتاب می‌کنیم. موارد زیر را به دست آورید.

- (آ) احتمال این که جفت شش بیاید. (ب) احتمال این که هر دو تاس اول بیاید.  
(پ) احتمال این که هر دو تاس یکسان بیاید. (ت) احتمال این که مجموع اعداد رو شده، ۷ باشد.  
(ث) احتمال این که حاصل ضرب اعداد رو شده، ۱۰ باشد.  
(ج) احتمال این که تاس سفید، ۶ و تاس سیاه ۱ بیاید.  
(چ) احتمال این که یکی از تاس‌ها ۶ و دیگری ۱ بیاید.



۹- خانواده‌ای دو فرزند دارد.

- (آ) همه‌ی حالت‌های ممکن برای جنسیت فرزندان این خانواده را بنویسید.  
(ب) احتمال این که هیچ کدام از فرزندان پسر نباشند، چقدر است؟  
(پ) احتمال این که فرزند بزرگ‌تر پسر باشد، چقدر است؟  
(ت) احتمال این که حداقل یکی از فرزندان پسر باشد، چقدر است؟  
(ث) احتمال این که حداکثر یکی از فرزندان پسر باشد، چقدر است؟

| ردیف                         | آزمون تشریحی فصل مجموعه‌ها                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | نمره |
|------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| ۱                            | <p>(آ) مجموعه‌ی <math>\{\emptyset\}</math>، زیرمجموعه‌ی همه مجموعه‌ها است.</p> <p>(ب) عبارت «چهار دانش آموز یک کلاس» بیان‌گر یک مجموعه است.</p> <p>(پ) دو مجموعه دلخواه باهم برابرند اگر یکی زیرمجموعه‌ی دیگری باشد.</p> <p>(ت) در پرتاب دوتاس اگر <math>S</math> مجموعه‌ی همه‌ی حالات ممکن باشد، <math>n(S) = ۱۲</math> است</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | ۲    |
| ۲                            | <p>(آ) مجموعه‌ی <math>A = \{x \in \mathbb{N} \mid -۴ \leq x \leq ۵\}</math> دارای چند عضو است؟<br/> <math>۱۰</math> (۱) <math>۵</math> (۲) <math>۴</math> (۳) <math>۹</math> (۴)</p> <p>(ب) اگر <math>A</math> مجموعه‌ی اعداد طبیعی فرد و <math>B</math> مجموعه‌ی اعداد اول فرد باشد، کدام مجموعه تهی است؟<br/> <math>A - B</math> (۱) <math>B - A</math> (۲) <math>A</math> (۳) <math>A - (A \cap B)</math> (۴)</p> <p>(پ) در پرتاب دوتاس به‌طور هم‌زمان چقدر احتمال دارد حداقل یکی از آن‌ها عدد ۳ باشد.<br/> <math>\frac{۱}{۶}</math> (۱) <math>\frac{۱}{۲}</math> (۲) <math>\frac{۱۱}{۳۶}</math> (۳) <math>\frac{۱۲}{۳۶}</math> (۴)</p> <p>(ت) قسمت رنگی کدام مجموعه را نشان می‌دهد؟<br/>  <math>A - B</math> (۱) <math>B - A</math> (۲) <math>A \cap B</math> (۳) <math>A - (A \cup B)</math> (۴)</p> | ۲    |
| ۳                            | <p>جملات زیر را کامل کنید</p> <p>(آ) یک مجموعه ۸ عضوی دارای ..... زیرمجموعه است.</p> <p>(ب) اگر <math>A \subseteq B</math> خواهیم داشت. <math>A \cap B = \dots\dots\dots</math> و <math>A \cup B = \dots\dots\dots</math></p> <p>(پ) احتمال آمدن اعداد مضرب چهار در پرتاب یک تاس برابر با ..... است.</p> <p>(ت) مجموعه‌ی <math>\{(-۲)^۳, (-۴)^۲, -۲^۳, (-۲)^۴\}</math> یک مجموعه ..... عضوی است.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | ۲    |
| ۴                            | <p>(آ) اعضای هر یک از مجموعه‌ها را بنویسید.</p> <p><math>A = \{ \quad \}</math><br/> <math>B = \{ \quad \}</math><br/> <math>C = \{ \quad \}</math></p> <p>(ب) درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.</p> <p><math>\{۲, ۳\} \subseteq A</math> <math>۱ \in C</math> <math>\{۷\} \subseteq A</math> <math>b \notin B</math></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | ۲/۵  |
| ۵                            | مقدار $a$ و $b$ را طوری پیدا کنید که $A = \{a - ۷, -۳, ۲b + ۵\}$ دارای یک عضو باشد.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | ۱    |
| ادامه‌ی سؤالات در صفحه‌ی بعد |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |      |



## بخش ۵.۱

## منتخب نمونه دولتی و بهبود عملکرد

۱- دو مجموعه  $A = \{x - ۱, ۳\}$  و  $B = \{۹, x - y\}$  برابرند. مقدار  $x$  و  $y$  در کدام گزینه می باشد؟

- (۱)  $y = ۷, x = ۱۰$  (۲)  $y = -۷, x = ۱۰$   
(۳)  $y = ۱۰, x = ۷$  (۴)  $y = -۷, x = -۱۰$

۲- تعداد عضوهای کدام گزینه با بقیه متفاوت است؟

- (۱)  $\left\{ \frac{x+۱}{۲} \mid x \in \mathbb{N}, x \leq ۳ \right\}$  (۲)  $\{x^2 + ۱ \mid x \in \mathbb{Z}, -۱ \leq x \leq ۱\}$   
(۳)  $\{2x \mid x \in \mathbb{Z}, -۱ \leq x \leq ۱\}$  (۴)  $\{2^x \mid x \in \mathbb{N}, x < ۴\}$

۳- یک تاس را دو بار پرتاب می کنیم احتمال آنکه مجموع دو عدد رو شده برابر ۵ باشد کدام است؟

- (۱)  $\frac{۱}{۱۸}$  (۲)  $\frac{۵}{۱۲}$  (۳)  $\frac{۱}{۹}$  (۴)  $\frac{۵}{۳۶}$

۴- مجموعه ای اعداد صحیح و مثبت کوچک تر از ۶ چند زیر مجموعه دارد؟

- (۱) ۵ تا (۲) ۲۵ تا (۳) ۳۲ تا (۴) ۶۴ تا

۵- در پرتاب دو تاس با هم احتمال اینکه اعداد رو شده یکسان نباشد، چقدر است؟

- (۱)  $\frac{۱}{۲}$  (۲)  $\frac{۱}{۳۶}$  (۳)  $\frac{۵}{۶}$  (۴)  $\frac{۱}{۶}$

۶- مجموعه  $A = \left\{ (-۱)^{۴۰}, \frac{-۷}{-۷}, ۷^۰, ۳, \sqrt{۲۵} \right\}$  چند عضوی است؟

- (۱) ۲ عضوی (۲) ۳ عضوی (۳) ۴ عضوی (۴) ۵ عضوی

۷- در یک کلاس ۳۰ نفره، ۱۱ نفر عضو تیم والیبال، ۱۴ نفر عضو تیم فوتبال و ۱۰ نفر در هیچ تیمی نیستند. چند نفر در هر دو تیم عضو هستند؟

- (۱) ۲۵ (۲) ۱۰ (۳) ۵ (۴) ۳

۸- سه سکه را هم زمان پرتاب می کنیم، احتمال اینکه هر سه سکه یکسان ظاهر شوند، چقدر است؟

- (۱)  $\frac{۱}{۸}$  (۲)  $\frac{۲}{۹}$  (۳)  $\frac{۱}{۲}$  (۴)  $\frac{۱}{۴}$

۹- اگر  $A \subset B$  باشد در این صورت مجموعه  $A \cup (B - A)$  برابر است با:

- (۱)  $A$  (۲)  $B$  (۳)  $A \cap B$  (۴)  $B - A$

۱۰- اگر خانواده‌ای دارای سه فرزند باشد. چقدر احتمال دارد این خانواده حداقل دارای دو دختر باشد؟

- ☐ ۱  $\frac{1}{4}$ 
☐ ۲  $\frac{3}{4}$ 
☐ ۳  $\frac{3}{8}$ 
☐ ۴  $\frac{4}{8}$

۱۱- تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه  $A = \{5, \{2, 3\}, \emptyset\}$  برابر است با:

- ☐ ۱ ۸
 ☐ ۲ ۱۶
 ☐ ۳ ۳۲
 ☐ ۴ ۶۴

۱۲- اگر  $A \cap B = A$  باشد، کدام گزینه درست است؟

- ☐ ۱  $A \not\subseteq B$ 
☐ ۲  $B \subseteq A$ 
☐ ۳  $A \subseteq B$ 
☐ ۴  $B = \emptyset$

۱۳- سه تاس سالم را پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال اعداد رو شده مضرب سه نیستند؟

- ☐ ۱  $\frac{8}{27}$ 
☐ ۲  $\frac{4}{9}$ 
☐ ۳  $\frac{19}{27}$ 
☐ ۴  $\frac{2}{3}$

۱۴- مجموعه‌ی  $A$  شامل تمام اعداد چهار رقمی است که حاصل ضرب رقم‌هایشان ۹ است. یکی از عضوهای این مجموعه را به تصادف

انتخاب می‌کنیم، احتمال این که این عدد کوچک‌تر از  $3^{100}$  باشد، کدام است؟

- ☐ ۱  $\frac{1}{2}$ 
☐ ۲  $\frac{3}{5}$ 
☐ ۳  $\frac{1}{3}$ 
☐ ۴  $\frac{5}{6}$

۱۵- اگر  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  و  $B = \{3, 4, 5\}$  باشد، مجموعه‌ی  $(B - A) \cup (A \cap B)$  کدام است؟

- ☐ ۱  $\{1, 3, 4\}$ 
☐ ۲  $\{3, 4, 5\}$ 
☐ ۳  $\{4, 5\}$ 
☐ ۴  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

۱۶- کدام یک از مجموعه‌های زیر مجموعه تهی را مشخص می‌کند؟

- ☐ ۱ اعداد زوج بین ۸ و ۱۱
 ☐ ۲ مضرب‌های اول عدد ۳
 ☐ ۳ عددهای طبیعی کوچکتر از ۱
 ☐ ۴ عددهای زوج اول

۱۷- مجموعه‌ی  $\{x | x \in \mathbb{N}, 2x + 1 \leq 10\}$  دارای چند عضو است؟

- ☐ ۱ ۶
 ☐ ۲ ۵
 ☐ ۳ ۴
 ☐ ۴ ۳

۱۸- اگر  $C = \{2, 4, 5, 6\}$  و  $B = \{3, 4, 5\}$  و  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  حاصل  $(A - B) \cup (B - C)$  کدام است؟

- ☐ ۱  $\{1, 2, 3\}$ 
☐ ۲  $\emptyset$ 
☐ ۳  $\{1, 2\}$ 
☐ ۴  $\{2, 5, 6\}$

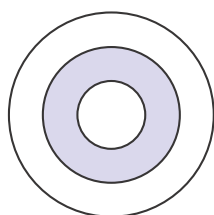
۱۹- اگر  $\{x + 7, 2x + y\} = \{10\}$  باشد، مقدار  $x$  و  $y$  در کدام گزینه است؟

- ☐ ۱  $x = 3, y = 4$ 
☐ ۲  $x = -3, y = 4$ 
☐ ۳  $x = 3, y = -4$ 
☐ ۴  $x = -3, y = -4$

## بخش ۶.۱

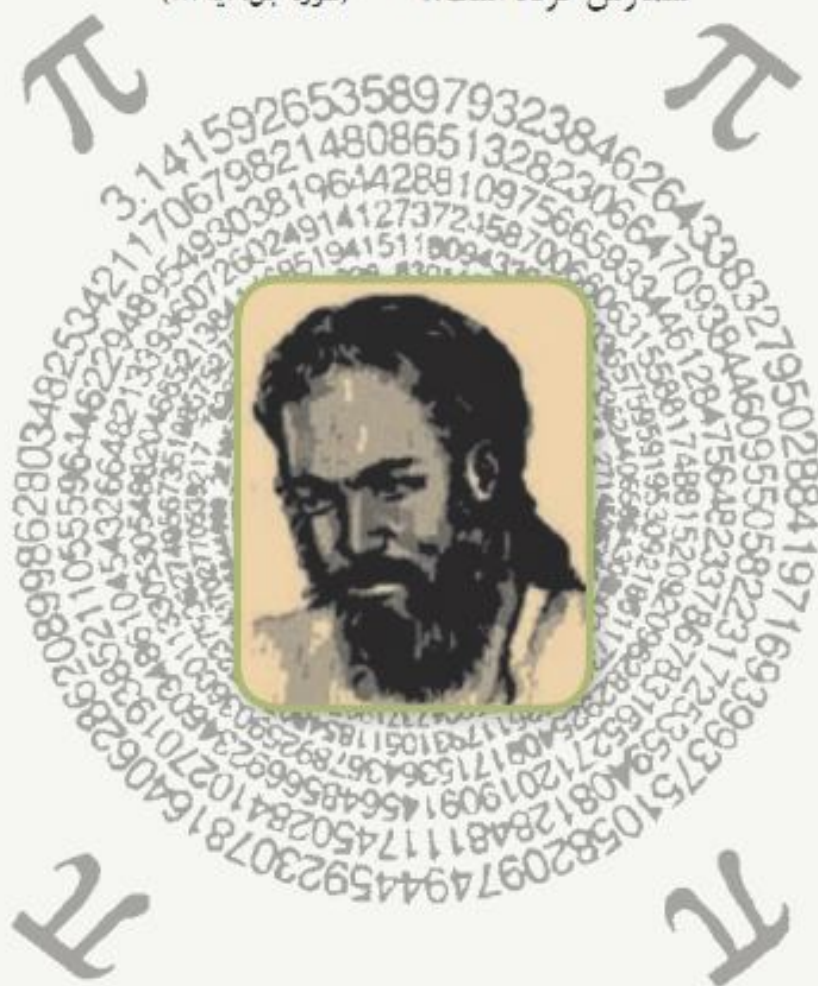
## سؤالات تکمیلی

- ۱- تعداد زیرمجموعه‌های ۶ عضوی یک مجموعه ۸ عضوی را به دست آورید.
- ۲- تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی یک مجموعه با تعداد زیرمجموعه‌های ۵ عضوی آن مجموعه برابر است. آن مجموعه چند عضو می‌تواند داشته باشد؟
- ۳- تمام زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی  $A = \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$  را بنویسید.
- ۴- سه فرزند اول یک خانواده پسر است. احتمال آنکه فرزند چهارم نیز پسر باشد چقدر است؟
- ۵- اگر  $A$  و  $B$  دو مجموعه باشند و  $A - B = A$ . حاصل  $n(A \cap B)$  چند است؟
- ۶- دو عضو از مجموعه اعداد اول کوچکتر از ۲۰ را انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه مجموع این دو عدد فرد باشد، چیست؟  
تورنی تیم مرحله اول، ۱۴۰۱ — ۱۴۰۰
- ۷- اگر  $A = \{(-1)^n \times 2^{n-1} \mid n \in \mathbb{W}, n < 6\}$  و  $B = \{2k \mid k \in \mathbb{Z}, -2 < k < 5\}$ .  
الف) مجموعه‌های  $A$  و  $B$  را با اعضایشان مشخص کنید.  
ب) چند مجموعه مانند  $X$  وجود دارد که  $X \subseteq A$  و  $X \subseteq B$ ؟  
تورنی تیم مرحله اول، ۱۴۰۱ — ۱۴۰۰
- ۸- دو رأس از یک هفت ضلعی منتظم را به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه این دو رأس روی یک ضلع این هفت ضلعی باشد، چقدر است؟  
تورنی تیم مرحله اول، ۱۴۰۱ — ۱۴۰۰
- ۹- چند عدد سه رقمی داریم که رقم یکان آن ۳ بوده یا بر عدد ۳ بخش پذیر است؟  
تورنی تیم مرحله دوم، ۱۴۰۰ — ۱۳۹۹
- ۱۰- اگر  $a \in \mathbb{Z}$  و  $a + 1 < -\sqrt{130} < a$  و  $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid a < x < a + 1\}$  و  $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid (\sqrt{-x})^2 < 9\}$  باشند. مجموعه  $C - D$  را به صورت اعضاء بنویسید.  
تورنی تیم مرحله دوم، ۱۴۰۱ — ۱۴۰۰
- ۱۱- سیبلی مانند شکل روبه‌رو از سه دایره هم مرکز تشکیل شده است که شعاع‌های آنها به ترتیب ۱ و ۲ و ۳ است. تیری به تصادف به طرف سیبل پرتاب می‌شود. اگر تیر به سیبل خورده باشد، احتمال آنکه تیر به ناحیه رنگی برخورد کرده باشد را به دست آورید.



## عددهای حقیقی

«... وَ أَحَاطَ بِمَا لَدَيْهِمْ وَأَخْصَى كُلَّ شَيْءٍ عَدَدًا»  
 «... و او (خداوند) به آنچه نزد آنهاست احاطه دارد و همه چیز را به عدد  
 شمارش کرده است..» (سوره جن، آیه ۲۸)



غیاث‌الدین جمشید کاشانی زبردست‌ترین حسابدان، برجسته‌ترین ریاضی‌دان دوره اسلامی و از بزرگ‌ترین  
 مفاخر تاریخ ایران به‌شمار می‌رود. کاشانی به روشی کاملاً خلاقانه و از طریق محاسبه و مقایسه محیط  
 چندضلعی‌های محاطی و محیطی توانست عدد  $\pi$  که عددی **حقیقی** و **گنگ** است را تا ۱۶ رقم بعد از اعشار  
 محاسبه کند که تا حدود ۱۵۰ سال پس از وی کسی در جهان نتوانست با دقت بهتری آن را محاسبه کند. او در  
 ابتدای رساله محیطیه خود به زبان ریاضی به نام خدا را چنین بیان می‌کند:  
 «به نام او که از اندازه نسبت محیط دایره به قطرش آگاه است.»